

一种采用矩阵分解的正交 4 抽头多小波无损压缩算法

景明利^{1,2}, 齐春¹

(1. 西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安; 2. 西安财经学院统计学院, 710100, 西安)

摘要: 针对 4 抽头多小波整数变换算法在图像无损压缩中加权熵较大的问题, 提出了一种利用矩阵奇异值分解和三角分解的 4 抽头正交多小波整数变换算法. 首先把多小波系数矩阵组成的右循环变换矩阵分解为两个块对角阵与一个置换阵之积, 并对块对角阵中的块矩阵进行基本三角分解, 其次对输入图像中的每一列依次与基本三角阵相乘, 并对每一次相乘的结果进行取整运算, 最后在输入图像列变换结果的基础上对每一行再重复上述对图像的列运算. 因为在整个变换过程中该算法实现了原位计算, 所以减少了运算的存储空间和运算时间. 对 CL、DGHM、SA4、SA4-1、SA4-2、SA4-3、OPTFR 多小波的实验结果表明: 相对于 4 抽头多小波 Van Fleet 算法, 该算法对图像压缩的加权熵减少了 1.9~2.8 b.

关键词: 多小波; 整数变换; 无损压缩; 奇异值分解

中图分类号: TN911 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)02-0054-05

Orthogonal 4-Tap Multiwavelet Transform for Lossless Compression

JING Mingli^{1,2}, QI Chun¹

(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China)

Abstract: An algorithm for orthogonal 4-tap integer multiwavelet transforms is proposed. By the singular value decomposition (SVD), the transform matrix can be rewritten in a product of two block diagonal matrices and a permutation matrix, and the block matrix in block diagonal matrices is factorized into triangular elementary reversible matrices (TERMs), which map integers to integers by rounding arithmetic. The cost of factorizing block matrix into TERMS does not increase with the increasing dimension of transform matrix, and the proposed algorithm is in-place calculation without allocating auxiliary memory. The examples of integer multiwavelet transform for CL, DGHM, SA4, SA4-1, SA4-2, SA4-3 and OPTFR verify that the proposed algorithm outperforms the existing algorithm for orthogonal 4-tap integer multiwavelet transform. Compared with the Van Fleet algorithm, the weighted entropy of the proposed method is decreased by 1.9~2.8 bits.

Keywords: multiwavelet; integer transform; lossless compression; singular value decomposition

小波变换由于其良好的时频特性被广泛应用于图像压缩编码中. 文献[1]提出了两种针对单小波的整数变换算法, 特别是基于提升格式的整数变换算法已成为应用最为广泛的方法之一, 并被 JPEG2000 标准所采用. 此后, 文献[2]利用提升格

式, 不但降低了小波变换系数的一阶熵, 而且提高了可逆整数小波变换的压缩性能.

与单小波不同, 多小波的整数变换算法研究相对较少. 目前, 两重多小波的研究及应用相对较多^[3-5], 因此针对两重多小波的整数变换算法研究具

有理论和应用的价值. 文献[6]提出了一种 2 抽头多小波整数变换算法,是一种逼近的具有高消失矩的非截断算法. 基于文献[6]中的多小波整数变换算法,文献[7]对超声谱数据进行了压缩,取得了较好的效果. 文献[8]提出了一种 4 抽头 2 重正交多小波整数变换算法,并利用 DGHM 多小波进行了图像的无损压缩实验,算法的不足之处是逆变换运算量较大和要计算尺度因子,且尺度因子是大于 1 的无理数,导致变换后数据的动态范围扩大,这对图像压缩是不利的^[1].

根据 4 抽头正交多小波变换阵的特点,本文提出一种基于矩阵奇异值分解和三角分解的 r 重 4 抽头整数变换的算法. 与文献[8]相比,本文算法不需要额外计算尺度因子就可以完成整数变换,而且变换矩阵的分解计算量不会随变换矩阵维数的增加而增加. 同时,该算法在进行整数变换时实现了原位计算,从而减少了变换时的存储空间. 与文献[9]相比,变换过程中基本三角阵的个数由 9 个减少到 4 个,运算量减少了约 56%.

1 基本理论

1.1 整数变换理论

文献[10]证明了变换矩阵 $\mathbf{A}$ 分解为 4 个基本三角矩阵之积的充分必要条件是变换阵行列式的绝对值为 1,即 $\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{S}$ 的充分必要条件为 $|\det(\mathbf{A})|=1$,其中 $\mathbf{P}$ 为置换矩阵, $\mathbf{L}$ 为下三角阵, $\mathbf{U}$ 为上三角阵, $\mathbf{S}$ 为下三角矩阵,所有矩阵的大小均为 $n\times n$,这种矩阵分解称为基本三角阵分解.

记输入的整数信号为 $\mathbf{X}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$,变换后输出信号 $\mathbf{Y}=[y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ 可以按下述方法完成整数变换. 记 $\mathbf{L}=(l_{i,j})_{n\times n}, \mathbf{U}=(u_{i,j})_{n\times n}, \mathbf{P}_{n\times n}$ 分别为下三角阵、上三角阵和置换阵. 对变换阵为上三角的情况,可逆整数变换的正变换算法和逆变换算法^[10]分别为

$$y_i = \begin{cases} u_{i,i}x_i, & i = n \\ u_{i,i}x_i + \left[\sum_{k=i+1}^n u_{i,k}x_k\right], & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_i = \begin{cases} \frac{y_i}{u_{i,i}}, & i = n \\ \left(\frac{1}{u_{i,i}}\right)(y_i - \left[\sum_{k=i+1}^n u_{i,k}x_k\right]), & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (2)$$

与变换阵为上三角时类似,当变换阵为下三角阵时,

可逆整数变换的正变换和逆变换算法^[10]分别为

$$y_i = \begin{cases} l_{i,i}x_i, & i = 1 \\ l_{i,i}x_i + \left[\sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}x_k\right], & 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3)$$

$$x_i = \begin{cases} \frac{y_i}{l_{i,i}}, & i = 1 \\ \left(\frac{1}{l_{i,i}}\right)(y_i - \left[\sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}x_k\right]), & 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4)$$

式中: $[\]$ 表示取整运算.

由于置换矩阵为正交阵,所以置换阵变换算法和逆变换算法分别为 $\mathbf{Y}_P=\mathbf{P}\mathbf{X}, \mathbf{X}=\mathbf{P}^T\mathbf{Y}_P$.

1.2 4 抽头 r 重正交多小波变换阵的性质

假设 $\Phi(t)=[\Phi_1, \cdots, \Phi_r]^T, \Psi(t)=[\psi_1, \cdots, \psi_r]^T \in L^2(\mathbf{R})^r$ 分别为 r 重 4 抽头正交多小波的尺度函数和小波函数,则相应的两尺度方程^[3-5]为

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \Phi(2t-k); \quad \Psi(t) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{Q}_k \Phi(2t-k) \quad (5)$$

与文献[1]类似,多小波变换矩阵 $\mathbf{H}$ 表示为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{2i} & \mathbf{P}_{2i+1} \\ \mathbf{Q}_{2i} & \mathbf{Q}_{2i+1} \end{bmatrix} (i=0,1), \mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_j (j=0,1,2,$

3)分别为双尺度方程系数矩阵.

直接对变换矩阵 $\mathbf{H}$ 进行基本三角分解运算量很大,为此基于矩阵 $\mathbf{H}$ 的如下特殊性质^[9],对其进行重新表示以减少运算量.

性质 1 若 $\mathbf{H}$ 为 r 重 4 抽头正交多小波变换阵,则 $\text{rank}(\mathbf{H}_0) + \text{rank}(\mathbf{H}_1) = 2r$.

性质 2 $\mathbf{H}_0$ 中非零奇异值所对应的左(右)奇异向量 $\mathbf{u}_0^i(\mathbf{v}_0^i)$ 与 $\mathbf{H}_1$ 中非零奇异值所对应左(右)奇异向量 $\mathbf{u}_1^j(\mathbf{v}_1^j)$ 是正交的,即 $\langle \mathbf{v}_0^i, \mathbf{v}_1^j \rangle = 0 (\langle \mathbf{u}_0^i, \mathbf{u}_1^j \rangle = 0)$, 其中 $i=1, 2, \cdots, m, m = \text{rank}(\mathbf{H}_0), j=1, 2, \cdots, s, s = \text{rank}(\mathbf{H}_1), s+m=2r$.

性质 3 $\mathbf{H}_0$ 和 $\mathbf{H}_1$ 所对应的非零奇异值均为 1.

为了将 $\mathbf{H}$ 表示为两个块对角阵与一个置换阵之积,对 $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1$ 分别进行奇异值分解,得到 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{U}_0 \mathbf{D}_0 \mathbf{V}_0^T, \mathbf{H}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{V}_1^T$. 从性质 2 得, $\mathbf{U}_0$ 与 $\mathbf{U}_1$ 中的列

向量互相正交, $\mathbf{V}_0^T$ 与 $\mathbf{V}_1^T$ 中的行向量也互相正交. 根据性质 1、性质 2, 把 $\mathbf{H}_0$ 中的非零奇异值所对应的左奇异值向量与 $\mathbf{H}_1$ 中的非零奇异值所对应的左奇异值向量放在一起组成正交阵 $\bar{\mathbf{U}}$, 同理把 $\mathbf{H}_0$ 和 $\mathbf{H}_1$ 的非零右奇异值向量放在一起组成正交阵 $\mathbf{V}^T$, 经过上述运算后, 变换矩阵 $\mathbf{H}$ 可以重新表示为

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{V}^T =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \bar{\mathbf{D}}_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \bar{\mathbf{D}}_1 \\ \bar{\mathbf{D}}_1 & \dots & & 0 & \mathbf{D}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\mathbf{V}}^T \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: $\bar{\mathbf{U}}$ 和 $\mathbf{V}^T$ 分别是以 $\bar{\mathbf{U}}$ 和 $\bar{\mathbf{V}}^T$ 为主对角线元素的块对角阵; $\bar{\mathbf{P}}$ 为置换阵; $\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{u}_0^1, \mathbf{u}_0^2, \dots, \mathbf{u}_0^m, \mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_1^2, \dots, \mathbf{u}_1^s]$; $\bar{\mathbf{V}} = [\mathbf{v}_0^1, \mathbf{v}_0^2, \dots, \mathbf{v}_0^m, \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_1^s]$; $\bar{\mathbf{D}}_1 = \text{diag}(0, \dots, 0, \mu_1, \dots, \mu_s)$; $\mathbf{D}_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0)$. 由性质 3 可知, $\mu_j = \lambda_i = 1$; $j = 1, 2, \dots, s$; $i = 1, 2, \dots, m$. 对式(7)中的正交阵 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}^T$ 进行基本三角分解, 得到各自相应的 $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_0 \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{S}_0$ 和 $\bar{\mathbf{V}}^T = \mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1$, 接着利用式(1)~式(4)可实现整数变换. 变换矩阵 $\mathbf{H}$ 重新表示为式(7)后, 有以下几点优势.

(1) 减少了运算量. 与直接对变换阵 $\mathbf{H}$ 进行基本三角分解的运算量 $o(n^2)$ 相比, 对 $2r \times 2r$ 矩阵 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}^T$ 进行分解的运算量是 $o((2r)^2)$, 由于 $2r$ 远小于 n , 这样就显著降低了矩阵分解运算量. 从式(7)可知, 对 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}^T$ 进行分解的运算量不随 $\mathbf{H}$ 的行数 n 的增加而增加. 在一般情况下, r 取值为 2, 这时算法分解运算量为两个 4×4 矩阵进行分解的运算量.

(2) 计算简便. 矩阵经过基本三角分解后, 反变换的运算仅需将正变换中的加法改为减法, 乘法改为除法运算, 即能够实现所谓的原位计算. 与文献[8]相比, 将 $\mathbf{H}$ 重新表示为 $\mathbf{U}$ 、 $\bar{\mathbf{P}}$ 、 $\mathbf{V}^T$ 之积后, 可以很方便地完成可逆的整数变换且不用额外计算尺度因子.

2 4 抽头 r 重正交多小波整数变换算法

因为 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}$ 均为 $2r \times 2r$ 矩阵, 为了叙述简单, 将输入长度 $L = 2rM$ 的信号 $\{\mathbf{x}_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, L$) 每 $2r$ 个分量分为一组, 这样输入信号可以被分成 M 组, 其中 r 为多小波的重数, M 为任意的正整数. 输入

信号 $\{\mathbf{x}_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, L$) 经过 j 次基本初等变换后, 可表示为 $\{[x_1^{1,j}, x_2^{1,j}, \dots, x_{2r}^{1,j}]^T, \dots, [x_1^{k,j}, x_2^{k,j}, \dots, x_{2r}^{k,j}]^T, \dots, [x_1^{M,j}, x_2^{M,j}, \dots, x_{2r}^{M,j}]^T\}$, 简记为 $\{\mathbf{X}_k^j\}$, 其中 $k = 1, 2, \dots, M$. 4 抽头 r 重正交多小波整数变换算法步骤如下:

(1) 对 $\mathbf{H}_0$ 、 $\mathbf{H}_1$ 分别进行奇异值分解, 得到 $\mathbf{U}_0$ 、 $\mathbf{D}_0$ 、 $\mathbf{V}_0^T$ 、 $\mathbf{U}_1$ 、 $\bar{\mathbf{D}}_1$ 、 $\mathbf{V}_1^T$;

(2) 由式(7), 得到 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}^T$, 由 $\mathbf{D}_0$ 、 $\bar{\mathbf{D}}_1$ 得到矩阵 $\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{D}_0, \bar{\mathbf{D}}_1]$;

(3) 分别对 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}^T$ 进行基本三角分解, 得到 $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_0 \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{S}_0$, $\bar{\mathbf{V}}^T = \mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1$;

(4) 将 $\mathbf{X}_k^j$ ($k = 1, \dots, M$) 依次与 $\mathbf{S}_1$ 、 $\mathbf{U}_1$ 、 $\mathbf{L}_1$ 、 $\mathbf{P}_1$ 、 $\bar{\mathbf{P}}$ 、 $\mathbf{S}_0$ 、 $\mathbf{U}_0$ 、 $\mathbf{L}_0$ 、 $\mathbf{P}_0$ 进行整数变换, 相应的算法可以根据变换矩阵的形式(上三角、下三角、置换阵)从 1.2 节中进行选择.

特别要强调的是, 当 $j = 5$ 时, 矩阵 $\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{D}_0, \bar{\mathbf{D}}_1]$ 为 $2r \times 4r$, 它的变换过程如下

$$\mathbf{X}_k^j = \begin{cases} \mathbf{D}_0 \mathbf{X}_k^{j-1} + \bar{\mathbf{D}}_1 \mathbf{X}_{k+1}^{j-1}, & k = 1, 2, \dots, (M-1) \\ \mathbf{D}_0 \mathbf{X}_k^j + \bar{\mathbf{D}}_1 \mathbf{X}_1^j, & k = M \end{cases}$$

由于 $\mathbf{X}_k^j$ ($k = 1, \dots, M$) 每次变换结果均为整数, 则经过 $j = 4 + 4 + 1$ (变换矩阵的个数) 次整数变换后, 输入信号整数正向变换结果 $\{\mathbf{X}_k^9\}$ ($k = 1, 2, \dots, M$) 也为整数. 反变换算法可以通过对上述过程利用基本三角矩阵整数逆变换算法得到.

3 数值实验

为了测试本文算法的性能, 数值实验中我们选择 DGHM^[11]、CL^[12]、SA4^[13]、SA4-1^[14]、SA4-2^[14]、SA4-3^[14]、OPTFR^[15] 7 种 4 抽头正交多小波与 2 两种单小波 D4^[1] 和 9-7^[1] 进行性能比较. 采用文献[14-16]中的平衡化矩阵对这 7 种多小波进行平衡化处理, 处理后的多小波各自相应的 $\mathbf{H}_0$ 和 $\mathbf{H}_1$ 分别进行奇异值分解, 得到相应的 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}^T$ 、 $\bar{\mathbf{P}}$, 再对 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}^T$ 进行基本三角分解, 并利用上节变换算法得到整数结果.

实验中选取 7 幅标准测试图像, 每幅图像的大小均为 512×512 , 对每幅测试图像进行一次整数变换(即对图像进行一层分解). 图 1、图 2 和图 3 分别为原始 lena 图像、一层多小波分解的整数 lena 图像和一层小波分解的整数 lena 图像.

由于 4 抽头 r 重正交多小波的整数变换目前只有文献[8]给出的算法, 因此只与文献[8]的结果进行比较. 在进行压缩性能比较中选择加权熵 $\mathbf{E}$ 作为标准, 加权熵 $\mathbf{E}$ 的详细计算见文献[1], 各测试图像的加权熵 $\mathbf{E}$ 如表 1 所示.



图 1 原始 lena 图像

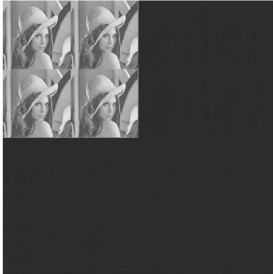


图 2 一层多小波分解的 lena 整数图像

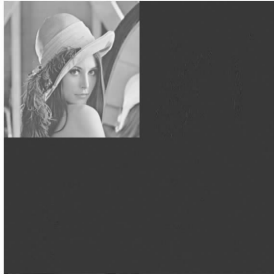


图 3 一层小波分解的 lena 整数图像

表 1 不同多小波变换的图像加权熵

标准 图像	E									
	DGHM	CL	DGHM ^[8]	OPTFR	SA4	SA4-1	SA4-2	SA4-3	D4	9-7
lena	5.222 8	5.182 2	8.018 3	5.159 7	5.153 6	6.135 0	6.137 4	6.127 6	5.738 8	5.154 5
boat	5.309 3	5.255 0	7.844 2	5.237 9	5.231 3	6.205 7	6.206 8	6.197 6	5.774 5	5.154 5
baboon	6.492 6	6.458 1	8.368 6	6.451 8	6.451 4	6.998 2	6.997 9	6.997 8	6.801 2	6.397 5
man	5.790 0	5.741 5	8.247 0	5.738 4	5.736 3	6.657 4	6.658 0	6.654 2	6.241 6	5.682 2
couple	5.630 4	5.608 2	8.060 4	5.594 6	5.592 8	6.452 9	6.453 5	6.450 2	6.068 5	5.509 8
plane	4.922 0	4.868 9	7.484 0	4.837 5	4.827 6	5.964 2	5.965 9	5.951 1	5.441 6	4.709 9
peppers	5.409 4	5.387 1	8.157 1	5.377 1	5.373 2	6.223 2	6.226 9	6.216 1	5.837 4	5.354 2

由表 1 可以看出,各图像由本文方法得到的加权熵都小于文献[8]的结果,因为文献[8]中的变换阵乘了大于 1 的比例因子,扩大了变换后数据的动态范围,使得加权熵变大.加权熵小意味着压缩性能好,因此对于 4 抽头 r 重正交多小波的整数变换来说,本文的方法优于现有的方法. SA4-1、SA4-2、SA4-3 的压缩性能非常接近,SA4、OPTFR 和 CL 多小波的压缩性能几乎一致. 9-7 小波与 SA4、OPTFR 和 CL 虽然性能十分接近,但是 9-7 小波相对于这 3 个多小波而言性能更加出色,这是因为 9-7 小波的消失矩为 4,而 SA4、OPTFR 和 CL 消失矩均小于 4,而且预处理均采用了一阶平衡化处理,使得多小波的性能没有完全显现出来.如果能够提高平衡化阶数,可以进一步降低加权熵,提高压缩比.

4 结 论

针对 r 重 4 抽头正交多小波的特点,提出了一种利用矩阵奇异值分解和三角分解的 r 重 4 抽头正交多小波整数变换算法.通过把变换阵分解为两个块对角阵与一个置换阵之积,选择块对角阵中的块矩阵进行分解,从而实现了 r 重 4 抽头正交多小波的整数变换.基于 DGHM、CL、SA4、SA4-1、SA4-2、

SA4-3 和 OPTFR 多小波进行图像的数值实验表明,本文算法的压缩性能优于现有的 Van Fleet 算法,对多小波变换效果产生关键影响的是预处理方式.本文仅采用了一阶平衡化方法对多小波进行预处理,因此研究如何通过提高平衡阶数以提高算法的无损压缩性能将会是非常有必要的工作.

参考文献:

[1] CALDERBANK A R, DAUBECHIES I, SWELDENS W, et al. Wavelet transforms that map integers to integers[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis,1998, 5(3): 332-369.

[2] DEEVER A T, HEMAMI S S. Lossless image compression with projection-based and adaptive reversible integer wavelet transforms[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(5):489-499.

[3] COTRONEI M, MONTEFUSCO L B, PUCCIO L. Multiwavelet analysis and signal processing[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems,1998, 45(8): 970-987.

[4] STRELA V, HELLER P N, STRANG G, et al. The application of multiwavelet filterbanks to image processing[J]. IEEE Transactions on Image Processing,

- 1999, 8(4): 548-563.
- [5] XIA X G. A new prefilter design for discrete multiwavelet transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(6): 1558-1570.
- [6] CHEUNG K W, PO L M. Integer multiwavelet transform for lossless image coding[C] // Proceedings of 2001 International Symposium on Intelligent Multimedia Video and Speech Processing. Piscataway, NJ, USA; IEEE, 2001:117-120.
- [7] HUANG B, SRIRAJA Y, HUANG H L, et al. Lossless multiwavelet compression of ultraspectral sounder data[C] // IEEE International Conference on Geoscience and Remote Sensing Symposium. Piscataway, NJ, USA; IEEE, 2006:3541-3544.
- [8] VAN FLEET P J. Multiwavelets and integer transforms[J]. Journal of Computational Analysis and Applications, 2003, 5(1): 161-178.
- [9] JING Mingli, HUANG Hua, LIU Wuling, et al. A general approach for orthogonal 4-tap integer multiwavelet transforms[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2010, 2010:1-12.
- [10] HAO Pengwei, SHI Qinyun. Matrix factorizations for reversible integer mapping[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(10): 2314-2324.
- [11] DONOVAN G, GERONIMO J S, HARDIN D, et al. Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation function[J]. SIAM J Math Anal, 1996, 27(4): 1158-1192.
- [12] CHUI C K, LIAN J A. A study of orthonormal multiwavelets[J]. Applied Numerical Mathematics, 1996, 20(3): 273-298.
- [13] THAM J Y, SHEN L, LEE S L, et al. A general approach for analysis and application of discrete multiwavelet transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(2): 457-464.
- [14] THAM J Y, SHEN L, LEE S L, et al. A new multi-filter design property for multiwavelet image compression[C] // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway, NJ, USA; IEEE, 1999:1229-1232.
- [15] JIANG Q T. On the design of multifilter banks and orthonormal multiwavelet bases[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(12): 3292-3303.
- [16] ATTATITMONGCOL K, HARDIN D P, WILKES D M. Multiwavelet prefilters: part II optimal orthogonal prefilters[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(10): 1476-1487.

(编辑 杜秀杰 刘杨)